TCC – Capítulo 84

Ejercicio: Cambio al sistema "Centro de tri-momentos* "

NOTACIÓN: llamo P al cuadrimomento y p al trimomento

a) ¿Cuánto vale V?

Por ser una transformación de Lorentz,:

$$P_{A,B}^{COM} = \Lambda P_{A,B} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{A,B} \\ p_{A,B} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} E_A - \beta\, p_A \\ -\beta\, E_A + p_A \end{pmatrix} \text{ó } \gamma \begin{pmatrix} E_B - \beta\, p_B \\ -\beta\, E_B + p_B \end{pmatrix} \quad (1)$$

Entonces la suma de cuadrimomentos es:

$$P_A^{COM} + P_B^{COM} = \gamma \left\{ \begin{pmatrix} E_A - \beta\, p_A \\ -\beta\, E_A + p_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_B - \beta\, p_B \\ -\beta\, E_B + p_B \end{pmatrix} \right\} = \gamma \begin{pmatrix} E_A + E_B - \beta\left(p_A + p_B\right) \\ -\beta\left(E_A + E_B\right) + p_A + p_B \end{pmatrix}$$

Como γ no es cero:

$$-\beta\left(E_A + E_B\right) - p_A + p_B = 0 \Rightarrow \beta\left(E_A + E_B\right) = p_A + p_B$$

Como tomamos c=1, entonces β=V:

$$\boxed{V = \frac{p_A + p_B}{E_A + E_B}} \quad (2)$$

b) ¿Cuánto valen los cuadrimomentos?

Usando el resultado (2) podemos ver que γ ahora es:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\left(p_A + p_B\right)^2}{\left(E_A + E_B\right)^2}}}$$

Sacando denominador común la suma de las energías al cuadrado y subiéndola:

$$\gamma = \frac{\left(E_A + E_B\right)}{\sqrt{\left(E_A + E_B\right)^2 - \left(p_A + p_B\right)^2}} \quad (3)$$

En tanto que γβ es:

---

* Si nos vamos a poner quisquillosos y no vamos a llamar Centro de Masas al centro de masas, entonces hagámoslo con propiedad. "Centro de momentos" sería pedir que todo el cuadrimomento sea cero.

$$\gamma\beta = \frac{(E_A + E_B)}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} \frac{p_A + p_B}{E_A + E_B}$$

$$\gamma\beta = \frac{p_A + p_B}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} \tag{4}$$

Usamos la ec.(1) para P^{COM}, empecemos por B

$$P_B^{COM} = \begin{pmatrix} \gamma E_B - \gamma\beta\, p_B \\ -\gamma\beta\, E_B + \gamma p_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(E_A + E_B)E_B}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} - \dfrac{(p_A + p_B)p_B}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} \\ -\dfrac{(p_A + p_B)E_B}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} + \dfrac{(E_A + E_B)p_B}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} \end{pmatrix}$$

Sacando la raíz cuadrada como factor común:

$$P_B^{COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} \begin{pmatrix} (E_A + E_B)E_B - (p_A + p_B)p_B \\ (E_A + E_B)p_B - (p_A + p_B)E_B \end{pmatrix}$$

Análogamente para A:

$$P_A^{COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} \begin{pmatrix} (E_A + E_B)E_A - (p_A + p_B)p_A \\ (E_A + E_B)p_A - (p_A + p_B)E_A \end{pmatrix}$$

Y al distribuir los productos:

$$P_A^{COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} \begin{pmatrix} E_A^2 + E_A E_B - p_A p_B - p_A^2 \\ (E_A p_A + E_B p_A) - (E_A p_A + E_A p_B) \end{pmatrix}$$

$$P_B^{COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} \begin{pmatrix} E_B^2 + E_A E_B - p_A p_B - p_B^2 \\ (E_A p_B + E_B p_B) - (E_B p_A + E_B p_B) \end{pmatrix}$$

Finalmente queda:

$$P_A^{COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} \begin{pmatrix} E_A^2 + E_A E_B - p_A^2 - p_A p_B \\ E_B p_A - E_A p_B \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$P_B^{COM} = \frac{1}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} \begin{pmatrix} E_B^2 + E_A E_B - p_B^2 - p_A p_B \\ E_A p_B - E_B p_A \end{pmatrix} \tag{6}$$

c) ¿Cuánto vale la Energía?

Ahora simplemente tenemos que sumar la primer coordenada de (5) con la primera de (6):

$$E^{COM} = \frac{E_A^2 + E_A E_B - p_A^2 - p_A p_B + E_B^2 + E_A E_B - p_B^2 - p_A p_B}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} =$$

$$= \frac{\left(E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B\right) - \left(p_A^2 + p_B^2 + 2p_A p_B\right)}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} = \frac{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}{\sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}}$$

Porque en cada paréntesis tengo el desarrollo del cuadrado de un binomio

$$\boxed{E^{COM} = \sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A + p_B)^2}} \qquad (7)$$